

# 扇形面積與周長

曾曉馨 台南市國小數學輔導團/大成國小

一、實施對象：六年級（個別輔導）

二、教學目標

主 題	<input type="checkbox"/> 數與計算 <input type="checkbox"/> 量與實測 <input checked="" type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
相關分年細目(97)	6-n-12(同 6-s-04) 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形面積。(同 6-s-04) 6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。 6-a-05 能用中文簡記式表示圓面積、圓周長與柱體的體積公式。
教學目標	1. 能了解扇形與圓的部份全體關係。 2. 能了解複合圖形區塊間的關係，進而掌握扇形面積與周長的解題策略。

三、學習難點

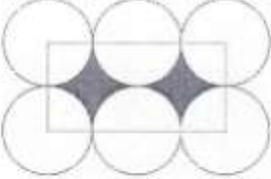
- 個案 3 位學生小筑、小吟和小慈在扇形面積與周長的學習單元存在著不同程度差異的若干問題，個別分析如下：
- 小筑：扇形周長的概念不清，對於複合圖形區塊間的相互關係亦無法掌握。

4. 請完成下面的填表						
類別	半徑	圓心角	幾分圓	弧長	周長	面積
A	5 cm	225°	$\frac{5}{8}$ 圓	17.425	29.625	49.0625
B	10 cm	225°	$\frac{5}{8}$ 圓	3.925	29.825	196.25
C	10 cm	26°	$\frac{7}{12}$ 圓	36.785	54.96	185.1
D	20 cm	135°	$\frac{3}{8}$ 圓	23.55	63.55	471

弧長頻頻計算錯誤，周長的概念亦不清。

無法掌握複合圖形區塊間的相互關係。

- 小吟：具備圓面積與圓周長的概念，也能夠透過小數乘法進行正確的半徑、圓面積與圓周長之間的換算，但無法精確掌握扇形周長與面積的部分全體關係，也無法有效了解複合圖形各區塊間的相互關係。

<p>1. 直徑 20 cm 的圓，圓面積為多少？  <math>d=20</math>  <math>r=10</math>  <math>A=\pi r^2</math>  <math>A=3.14 \times 10^2</math>  <math>A=314 \text{ cm}^2</math></p> <p>2. 圓周長 94.2 cm 的圓，圓面積為多少？  <math>C=94.2</math>  <math>C=2\pi r</math>  <math>94.2=2 \times 3.14 \times r</math>  <math>94.2=6.28r</math>  <math>r=15</math>  <math>A=\pi r^2</math>  <math>A=3.14 \times 15^2</math>  <math>A=706.5 \text{ cm}^2</math></p>	<p>4. 請完成下面的填表</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>序</th> <th>半徑</th> <th>圓心角</th> <th>弧長</th> <th>周長</th> <th>面積</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>5 cm</td> <td>225°</td> <td><math>\frac{5}{3}</math> 圓</td> <td>/</td> <td>/</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>10 cm</td> <td>225°</td> <td><math>\frac{5}{3}</math> 圓</td> <td>/</td> <td>/</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>10 cm</td> <td>90°</td> <td><math>\frac{7}{12}</math> 圓</td> <td>/</td> <td>/</td> </tr> <tr> <td>D</td> <td>20 cm</td> <td>135°</td> <td>/</td> <td>/</td> <td>/</td> </tr> </tbody> </table>	序	半徑	圓心角	弧長	周長	面積	A	5 cm	225°	$\frac{5}{3}$ 圓	/	/	B	10 cm	225°	$\frac{5}{3}$ 圓	/	/	C	10 cm	90°	$\frac{7}{12}$ 圓	/	/	D	20 cm	135°	/	/	/
序	半徑	圓心角	弧長	周長	面積																										
A	5 cm	225°	$\frac{5}{3}$ 圓	/	/																										
B	10 cm	225°	$\frac{5}{3}$ 圓	/	/																										
C	10 cm	90°	$\frac{7}{12}$ 圓	/	/																										
D	20 cm	135°	/	/	/																										
<p>能夠透過小數乘法進行正確的半徑、周長、圓面積與圓周長之間的換算。</p>	<p>能計算出扇形所佔圓的幾分之幾，或幾分之幾圓的圓心角角度，但無法類推到弧長和面積。</p>																														
<p>10. 下圖每個圓形的半徑皆為 10 cm，請問塗色部份的面積和周長各為多少？</p>  <p><math>r=10</math>  <math>2r=20</math>  <math>20 \times 20 = 400</math>  <math>4 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 10^2 = 314</math>  <math>400 - 314 = 86</math></p>	<p>小吟無法有效了解複合圖形各區塊間的相互關係，對於內部矩形的長、寬與半徑之間的關係均無法正確掌握，更遑論要了解塗色部分周長面積和矩形、圓形之間的關係。</p>																														

- 小慈：扇形的弧長與周長時有計算錯誤之情形，再者，對於複合圖形區塊間的相互關係無法掌握。

<p>12. 正方形的邊長為 20 cm，請問塗色部份的面積與周長各為多少？</p>  <p><math>20 \times 20 = 400</math>  <math>20 \div 2 = 10</math>  <math>4 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 10^2 = 314</math>  <math>400 - 314 = 86</math></p>	<p>無法有效了解複合圖形各區塊間的相互關係，認為塗色部份的面積是半徑 10 cm 的兩個圓來計算，雖然在此之前的算式曾嘗試著要找出正方形與塗色部分面積之間的關係，但因無法找到適當的切入點而終告失敗。</p>
---	--

四、補救教學內容處理：簡化 減量 分解 替代 重整

策略	內容說明
簡化	/
減量	/
分解	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 將欲達成之目標切分為幾個小目標，幫學生搭建學習鷹架，藉以逐步達成目標。</li> <li>● 第一階段：為了幫助學生瞭解扇形與圓的部份全體關係，筆者擬透過平分圓的方式，引導學生體驗圓心角與所佔圓幾分之幾的交互關係。因而給定標示角度的圓形，要求學生平分成 4 等分、8 等分…等。</li> <li>● 第二階段：透過平分的探討，引導學生進一步精確掌握圓心角與</li> </ul>

	<p>360° 之間的關係。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 第三階段：爲了幫助學生瞭解複合圖形區塊間的關係，筆者擬透過圖形的實際繪製來探討其構成元素。</li> <li>● 第四階段：再透過圖形的實際切割與拼組更進一步了解圖形間的相互關係，進而掌握扇形面積與周長的解題策略。</li> </ul>
替 代	1.以實際切割、黏貼的方式替代紙本作圖，引導學生探討複合圖形區塊間的關係。
重 整	/

## 五、教學規劃與實施

(一) 設計理念：本教學活動以前測→教學→後測的模式來進行教學探討。首先，筆者透過自行設計的前測試題試圖瞭解學生的學習落點，題目設計係乃由該單元的先備知識開始，藉此瞭解學生是否能交互運用半徑、直徑求出圓面積與圓周長，亦或透過圓面積、圓周長逆向回溯半徑或直徑。其次，再導入圓心角、幾分之幾圓間的換算題目，進而引出弧長、面積與周長的計算。最後，再藉由文字題及複合圖形的問題瞭解學生對該類型題目的掌握度。

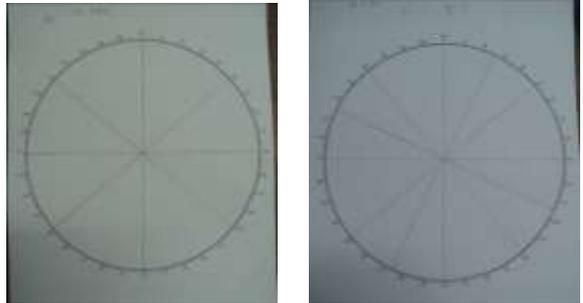
建立在前測的落點分析的基礎之上，筆者初步釐清了學生的問題點。大致看來，3位學生對於半徑、直徑、圓面積與圓周長的互逆關係均能掌握，但爲了進一步清楚其是否能真正掌握平分與部份全體的精髓，於是透過標註角度的圓形紙張之平分來加以瞭解，由此評估學生是否須進行分數板教學的連結。

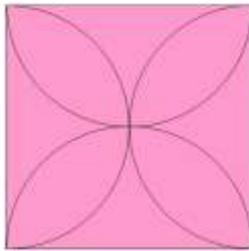
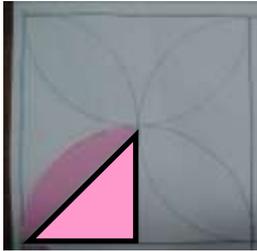
此外，學生對於複合圖形各區塊間的關係均存在著或多或少的問題，爲了進一步幫助學生掌握圖形的切割與填補，教學活動設計乃透過實作繪圖、切割與連貼的方式，引導學生由具體操作昇華至抽象的紙上作業，以建立學習與思考的模式。

一連串的教學活動之後，筆者擬再透過後測問題來瞭解學生的學習情形，後測題目的設計相較於前測，除了包含數據稍做改變的基本題外，亦融入變化度較大、難度較高的複合圖形題目，希望藉此檢視學生的學習與補救教學的成效。

(二) 教學活動

主要問題與活動	說明與評量重點
<p>★澄清幾分之幾圓的意義</p> <p>1. 要求學生透過標註角度的圓形紙張加以平分，一方面了解學生對於分數概念部分與全體之間的理解，一方面亦希望藉此連結圓心角與360°之間的相互關係。</p>	<p>★ 平分成4等分</p> <p>小筑、小吟皆能「憑感覺」畫出相互垂直的2條直徑來加以平分。</p> <p>★ 平分成8等分及12等分</p> <p>小吟在50°、90°、130°、180°、230°、270°、310°、360°處分別劃出4條通過圓心的直徑，以此作爲8等份的平分線；小筑則在</p>

主要問題與活動	說明與評量重點
<p data-bbox="284 215 826 573">  </p> <p data-bbox="300 1021 711 1059">2. 透過對折的方式檢驗平分</p> <p data-bbox="300 1115 730 1153">3. 重新透過分數版定義平分。</p> <p data-bbox="304 1167 743 1581">  </p> <p data-bbox="300 1641 829 1776">4. 認識幾分之幾圓代表著面積是全圓的幾分之幾，弧長也是全圓周長的幾分之幾。</p> <p data-bbox="240 1977 663 2016">★瞭解複合圖形區塊間的關係</p>	<p data-bbox="850 208 1433 387"> <math>25^\circ</math>、<math>50^\circ</math>、<math>90^\circ</math>、<math>115^\circ</math>、<math>140^\circ</math>、<math>180^\circ</math>、<math>205^\circ</math>、<math>230^\circ</math>、<math>270^\circ</math>、<math>295^\circ</math>、<math>320^\circ</math>、<math>360^\circ</math> 處分別劃出 6 條通過圓心的直徑，以此作為 12 等份的平分線。 </p> <p data-bbox="850 409 1433 712">  </p> <p data-bbox="850 734 1433 913">           小吟的 8 等份平分線 小筑的 12 等份平分線 (小慈能夠畫出正確的 8 等份與 12 等份的平分線，筆者亦透過小慈的作品，提供小吟與小筑做初步的比對學習)         </p> <p data-bbox="850 969 1433 1059">           引導小吟與小筑透過對折的方式檢視是否平分？         </p> <p data-bbox="850 1070 1433 1294">           配合先前標註角度的圓形紙張，再藉由 <math>\frac{8}{12} = \frac{240}{360} = \frac{2}{3}</math> 的等值分數概念，引導學生連結圓心角與幾分之幾圓間的對應關係。         </p> <p data-bbox="919 1323 1393 1525">  </p> <p data-bbox="850 1597 1433 1731">           透過實際堆疊的方式幫助學生感受角度所佔全體之比例與弧長佔全圓比例及面積佔全圓之比例相同。         </p> <p data-bbox="850 1753 1433 1865">           後續再透過相似題(<math>\frac{9}{12}</math>、<math>\frac{4}{6}</math>...等)來加以引導。         </p>

主要問題與活動	說明與評量重點
<p>1. 透過實際繪圖的過程，幫助學生瞭解圖形的周長。 透過 USL 專利尺，學生能夠搭配筆者所設計的 10 cm 正方形紙張，繪製出前測題目的複合圖形，藉以瞭解圖形的周長與正方形邊長之間的關係。 例如 ，學生可以藉由繪製的過程發現周長即以正方形邊長為直徑的 4 個半圓所形圈圍而成。</p> <p>2. 學生分別繪製兩張一模一樣的複合圖形，以白色正方形紙張為底稿，將粉紅色的圖形剪下，藉此發現圖形的構成元件。</p> <p>3. 例如 ，學生先利用 USL 專利尺在紅色紙張上畫出圖一的線條，之後再剪出圖二的圖案，透過填補學生可以發現該圖面積等同於直徑 10 cm 的半圓。</p> <p>4. 再舉一個例子，例如 ，學生可以透過單一葉片來探討 ()，亦可藉由 4 個半圓減掉正方形面積的方式來解題，透過裁減與貼合的過程，學生能夠具體了解其間的填補與重疊部分。</p>	    <p>圖一                      圖二</p>   <p>單一葉片              藉由 4 個半圓逐步交疊</p>   <p>藉由 4 個半圓逐步交疊</p>

## 六、學生表現與教學省思

### (一) 後測分析

1. 教學活動之後，原本在複合圖形關係較無法掌握的小慈，對於圖形的切割填補的敏感度大大提升。如下圖所示：

5. 正方形的邊長為 20 cm，請問塗色部份的面積是多少？



Handwritten solution:

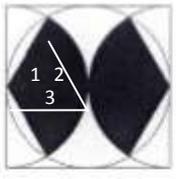
$$20 \div 2 = 10$$

$$10 \times 10 \times 2 = 200$$

$$A = 200 \text{ cm}^2$$

小慈能夠透過輔助線的切割與填補，將左圖視爲 2 個邊長爲 10 cm 的正方形面積，足見其對圖形的敏感度有所提昇。

9. 正方形的邊長為 20 cm，請問塗色部份的周長和面積是多少？



Handwritten solution:

$$20 \times 2 \times \frac{1}{3} \times 2$$

$$= 62.8 \times \frac{1}{3} \times 2$$

$$= \frac{628}{30} \times 2$$

$$= \frac{1256}{30}$$

$$= 41.87$$

$$41.87 + 20 \times 2 = 81.87$$

$$20 \div 2 = 10$$

$$10 \times 10 \times \frac{3}{4} \times 2$$

$$= 314 \times \frac{3}{4} \times 2$$

$$= 471$$

$$A = 471 \text{ cm}^2$$

小慈能夠發現 1、2、3 這 3 條線段都是半徑 10 cm 圓的半徑，進而透過正三角形的任一內角爲  $60^\circ$  的概念來找出塗色部份扇形的圓心角爲  $120^\circ$ ，也就是  $\frac{1}{3}$  圓的關鍵資訊來解題。

2. 教學活動之後，小吟在基本弧形、周長與面積的計算上明顯進步，對於複合圖形的切割與填補亦較有策略。如下圖所示

2. 請完成下面的填表

**	半徑	圓心角	****	弧長	周長	面積
A	5 cm	$60^\circ$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$10\frac{2}{3}$	$8\frac{5}{6}$
B	5 cm	$90^\circ$	$\frac{1}{4}$ 圓	$\frac{5\pi}{2}$	$10\frac{5}{4}$	$8\frac{5}{4}$
C	5 cm	$135^\circ$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$10\frac{3}{4}$	$8\frac{3}{4}$
D	10 cm	$90^\circ$	$\frac{1}{4}$ 圓	$5\pi$	$10\frac{5}{2}$	$25\frac{1}{2}$

從小吟在後測基本計算的答題表現可以發現，其在弧長、面積的部份整體概念上有所提昇，其次對於周長與弧長之間的關係亦較能掌握。

7. 正三角形的邊長為 18 cm，請問塗色部份的面積及周長各為多少？



Handwritten solution:

$$18 \div 2 = 9$$

$$3 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 9^2$$

$$= \frac{3}{4} \times \pi \times 81$$

$$= \frac{243}{4} \pi$$

$$= 152.14$$

$$A = 152.14$$

小吟能利用正三角形任一內角爲  $60^\circ$  的有效資訊，將塗色部分的面積旋轉並合併成圓心角  $180^\circ$ ，半徑 9 cm 的扇形，藉以解決面積及周長問題。

3. 教學活動之後，小筑在基本弧形、周長與面積的計算上明顯進步，但複合圖形的周長解題上，仍有待進一步加強，此外，當基準量改變的時候，部份全體關係的理解仍有待釐清。如下圖所示

2. 請完成下面的填表							從小筑在基本計算的答題表現來看，其在弧長與周長的理解上較前測表現較佳，且也能了解到「扇形周長=弧長+2×半徑」的關係，因此，扇形D的答題雖然有誤，但仍可看出其能運用關係解題。
序	半徑	圓心角	$n \times \pi r$	弧長	周長	面積	
A	5 cm	60°	$\frac{1}{6}$ 圓	$\frac{5\pi}{3}$ cm	$10\frac{5\pi}{3}$ cm	$8\frac{5\pi}{12}$ cm <sup>2</sup>	
B	5 cm	30°	$\frac{1}{12}$ 圓	$\frac{5\pi}{6}$ cm	$10\frac{5\pi}{6}$ cm	$4\frac{5\pi}{24}$ cm <sup>2</sup>	
C	5 cm	135°	$\frac{3}{8}$ 圓	$3.75\pi$ cm	$11.75\pi$ cm	$7\frac{3}{8}\pi$ cm <sup>2</sup>	
D	10 cm	210°	$\frac{7}{12}$ 圓	$10\frac{7\pi}{6}$ cm	$20\frac{7\pi}{6}$ cm	$16\frac{7}{6}\pi$ cm <sup>2</sup>	
7. 正三角形的邊長為 18 cm，請問塗色部份的面積及周長各為多少？							從左圖來看，小筑已能利用正三角形任一內角為 60° 的有效資訊，將塗色部分的面積旋轉並合併成圓心角 180°，半徑 9 cm 的扇形來解決面積及周長問題，但從單一圖形過渡到複合圖形的周長部份，仍有待加強。
3. 有兩個半徑相同的扇形，A 扇形的圓心角為 60°，B 扇形的圓心角為 240°，請問 A 扇形的面積是 B 扇形的( ) 倍。							當基準量改變，由全圓變為圓心角 240° 的扇形時，小筑對於部份全體關係的理解出現障礙，此部份有待後續加強。

## (二) 教學省思

### 1. 補救教學需視教學現場學生的問題與回應不斷修正教學策略：

本教學活動若按照原先的設計，依據學生前測的解題表現來規劃教學活動，本應可略過圓心角與幾分之幾圓連結的部份，但因透過標註角度的圓形紙張來進行平分的再次診斷教學之後，才發覺學生對該部分的概念理解較為薄弱，因而，進一步透過分數板的教學操作，加深圓心角所佔全體與幾分之幾圓間的連結，補強學生的學習斷層，藉以奠定後續弧長、面積的學習。筆者認為，補救教學的現場，教師須透過不斷的診斷與調整教學策略來幫助學生回溯概念，穩固根基，教師對於課程的熟悉度與概念資源的抽取都必須具備深厚的基礎，才能正確診斷切中要點，幫助學生跨越概念的鴻溝。

### 2. 教學活動建議從具體過渡到抽象：

進行高年級學生的補救教學時，雖說學習的素材與概念多為抽象運思期的學童所設計，理當引導學生進行較為抽象的思維運作，但筆者建議，面對這些學習挫敗而需補救的孩童，我們應盡可能的透過具體實作，幫助學生從建立操作經驗中逐步引渡到抽象思維，固然高年級學習主題要進行具體操作的設計，顯然較為不易，但筆者認為盡可能的提供學生「更有感覺」的數學學習經驗是每個補救教學現場教師應致力達成的目標。

### 3. 六年級學生的概念斷層不一而足，使得補救教學的概念追溯困難重重：

學生存在的概念斷層其差異性隨著年級而急劇的攀升，使得補救教學的進行愈發困難，以本單元為例，如果學生在先備的圓面積、圓周長與半徑、直徑關係的理解上就

出現狀況，那教學活動的設計勢必向前追溯，如果學生的程度差異懸殊，那麼教學就只能採一對一進行，因此，筆者認為研發與蒐集相關資訊融入教學的教學活動，提供學生進行適當的自學與診斷回饋，是補救教學現場迫切需要的，透過教師實際教學與資訊輔助的交互搭配，將更能提升補救的成效。

## 七、學習資源參考資料

南一書局四上數學備課指引  
博士兒大柱子數學 USL 專利尺

## 八、附件

- 本補救教學前測與後側題目

## 扇形面積與周長前測

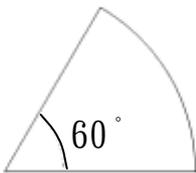
班級

姓名

1. 直徑 20 cm 的圓，圓面積為多少？

2. 圓周長 94.2 cm 的圓，圓面積為多少？

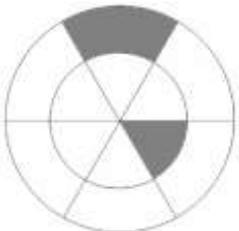
3. 半徑 60 cm，圓心角  $60^\circ$  的扇形周長為



4. 請完成下面的填表

扇形	半徑	圓心角	幾分之幾圓	弧長	周長	面積
A	5 cm	$225^\circ$				
B	10 cm	$225^\circ$				
C	10 cm		$\frac{7}{12}$ 圓			
D	20 cm	$135^\circ$				

5. 將大圓半徑 10 cm，小圓半徑 6 cm，將共圓心的兩個圓 6 等分，請問塗色部份的面積是多少？



6. 從邊長 40 公分的正方形紙板中剪出最大的圓形，請問圓形的面積是多少？

7. 從邊長 40 公分的正方形紙板中剪出最大的  $\frac{1}{4}$  圓，請問扇形的面積和周長各是

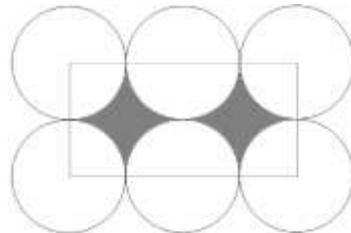
多少？

8. 相同半徑的扇形，如果圓心角愈大，扇形的弧長愈( )。

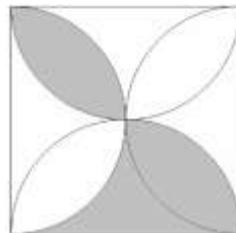
9. 正方形的邊長為 20 cm，請問塗色部份的面積與周長各為多少？



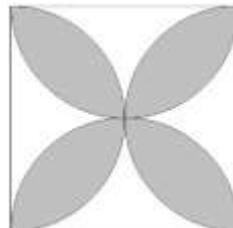
10. 下圖每個圓形的半徑皆為 10 cm，請問塗色部份的面積和周長各為多少？



11. 正方形的邊長為 20 cm，請問塗色部份的面積與周長各為多少？



12. 正方形的邊長為 20 cm，請問塗色部份的面積與周長各為多少？



## 扇形面積與周長後測

1. 半徑 10 公尺，圓心角  $108^\circ$  的扇形面積是多少？

2. 請完成下面的填表

扇形	半徑	圓心角	幾分之幾圓	弧長	周長	面積
A	5 cm	$60^\circ$				
B	5 cm		$\frac{1}{12}$ 圓			
C	5 cm	$135^\circ$				
D	10 cm		$\frac{7}{12}$ 圓			

3. 有兩個半徑相同的扇形，A 扇形的圓心角為  $60^\circ$ ，B 扇形的圓心角為  $240^\circ$ ，請問 A 扇形的面積是 B 扇形的( )倍。
4. 有兩個圓心角同為  $60^\circ$  的扇形，A 扇形的半徑為 B 扇形的 3 倍，請問 A 扇形的面積為 B 扇形的( )倍。
5. 正方形的邊長為 20 cm，請問塗色部份的面積是多少？



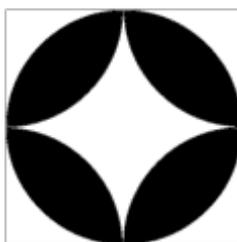
6. 正方形的邊長為 20 cm，請問塗色部份的面積是多少？



7. 正三角形的邊長為 18 cm，請問塗色部份的面積及周長各為多少？



8. 正方形的邊長為 20 cm，請問塗色部份的面積是多少？



9. 正方形的邊長為 20 cm，請問塗色部份的周長和面積是多少？

